Christian Semrau, Alexandra Merz

Musterloesung zur Probeklausur MPIB WS02
21.01.2003

1. Seien $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{3,3}$.

   Bestimmen Sie die Produkte AB und BA.

   $AB = \begin{pmatrix} -10 & 13 & 5 \\ 2 & -9 & -6 \\ -10 & 14 & 7 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & 17 & 21 \\ -2 & -4 & -1 \\ 0 & -8 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $(\mathbb{F}_2)^{3,3}$.

   Bestimmen Sie die Produkte AB und BA.

   $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Sei $V := \mathbb{R}^{2,2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ und $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in V$.

   Sei $\varphi\colon V \to V$, $\varphi(A) := AM - MA$.

   (a) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von V.
   Sei $B := \left\{ b_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
   Ist $A \in V$, dann ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{21}b_3 + a_{22}b_4$.
   Die Gleichung $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = 0$ ist äquivalent zu $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, aus der folgt, dass alle $\lambda_i = 0$ sein müssen.
   Damit ist B eine Basis von V, der die Dimension 4 hat.

   (b) Zeigen Sie, dass φ ein Homomorphismus ist.
   Seien $A, B \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.
   $\varphi(A+B) = (A+B)M - M(A+B) = (AM+BM) - (MA+MB) = AM - MA + BM - MB = \varphi(A) + \varphi(B)$.
   $\varphi(\lambda A) = (\lambda A)M - M(\lambda A) = \lambda(AM) - \lambda(MA) = \lambda\varphi(A)$.

   (c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Kerns von φ. (Der Kern von φ ist definiert als $\mathrm{Ke}(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$, er ist ein Untervektorraum von V.)
   Sei $A \in V$. Es ist $A \in \mathrm{Ke}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(A) = 0 \Leftrightarrow AM - MA = 0$.
   Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann ist die linke Seite der letzten Gleichung:
   $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+3b \\ c & 2c+3d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c & 2a+2b-2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix}$.
   Setzt man das der rechten Seite gleich, erhält man
   $AM - MA = 0 \Leftrightarrow c = 0$ und $a + b = d$.
   Es ist also $\mathrm{Ke}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Wie man leicht nachprüft, ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des 2-dimensionalen Kerns von φ.

4. Definieren Sie die Begriffe *Untervektorraum* und *Erzeugendensystem.*

   ...

5. Sei $V := \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $U := \{f \in V | f(0) = 0\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

      i. $\mathbf{0} \in U$: $\mathbf{0}(0) = 0$.
      ii. $f, g \in U \Rightarrow f + g \in U$: $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$.
      iii. $f \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f \in U$: $(\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda \cdot 0 = 0$.

   (b) Sei $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(f) = f(1)$. Zeigen Sie, dass φ ein VR-Homomorphismus ist.
   Seien $f, g \in U, \lambda \in \mathbb{R}$.
   $\varphi(f + g) = (f + g)(1) = f(1) + g(1) = \varphi(f) + \varphi(g)$.
   $\varphi(\lambda f) = (\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda\varphi(f)$.

   (c) [freiwillige Zusatzaufgabe] Finden Sie eine Darstellung des Kerns von φ (nicht durch Angabe einer Basis!).

6. Sei $f\colon V \to W$ ein surjektiver VR-Homomorphismus, U der Kern von f und $g\colon V/U \to W$, $g(\overline{v}) := f(v)$.

   Zeigen Sie, dass g wohldefiniert ist (also $\overline{v_1} = \overline{v_2} \Rightarrow f(v_1) = f(v_2)$) und ein VR-Isomorphismus ist.

   Seien $v_1, v_2 \in V$ mit $\overline{v_1} = \overline{v_2}$. Dann ist $\overline{v_1 - v_2} = \overline{0}$, also $v_1 - v_2 \in U$. Damit hat man $f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2) = 0$, also $f(v_1) = f(v_2)$.

   Dass g ein Homomorphismus ist, folgt direkt aus der Linearität von f.

   Ist $w \in W$, dann gibt es ein $v \in V$ mit $f(v) = w$, also ist $\overline{v}$ ein Urbild unter g.

   Sind nun $\overline{v_1}, \overline{v_2} \in V/U$, und $g(\overline{v_1}) = g(\overline{v_2})$, dann ist $f(v_1) = f(v_2)$ und $f(v_1 - v_2) = 0$, also $v_1 - v_2 \in U$ und schliesslich $\overline{v_1} = \overline{v_2}$.