Christian Semrau aka SirJective

Aufgabe

Gesucht sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f(f(x)) = -x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Seien A und B disjunkte, überabzählbare Mengen positiver reeller Zahlen mit $A \cup B = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Dann ist $\mathbb{R}$ die disjunkte Vereinigung $\mathbb{R} = \{0\} \cup A \cup B \cup (-A) \cup (-B)$. Sei $g\colon A \to B$ eine bijektive Abbildung.

Definiere

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ g(x) & x \in A \\ -g^{-1}(x) & x \in B \\ -g(-x) & x \in -A \\ g^{-1}(-x) & x \in -B \end{cases}$$

Dann erfüllt f die Gleichung $f(f(x)) = -x$:

$$f(f(x)) = \begin{cases} f(0) & x = 0 \\ f(g(x)) & x \in A \\ f(-g^{-1}(x)) & x \in B \\ f(-g(-x)) & x \in -A \\ f(g^{-1}(-x)) & x \in -B \end{cases} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ -g^{-1}(g(x)) & x \in A \\ -g(- - g^{-1}(x)) & x \in B \\ g^{-1}(- - g(-x)) & x \in -A \\ g(g^{-1}(-x)) & x \in -B \end{cases}$$

Für $A = (0,1] \cup (2,3] \cup \ldots (2n, 2n+1] \cup \ldots$ und $B = (1,2] \cup (3,4] \cup \ldots (2n+1, 2n+2] \cup \ldots$ haben wir die Bijektion

$$g\colon A \to B, g(x) = x + 1$$

und deren Umkehrung $g^{-1}(x) = x - 1$. Wir können A und B auch darstellen als

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge (2 \nmid \operatorname{ceil}(x))\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge (2 \mid \operatorname{ceil}(x))\}$$

Setzen wir das in die Formel für f ein, erhalten wir

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ +x + 1 & x \in A \\ -x + 1 & x \in B \\ +x - 1 & x \in -A \\ -x - 1 & x \in -B \end{cases}$$